Basi ortonormali in spazi di Hilbert.

Df: Un sistema ortonormale completo (S.O.N.C.) (o base ortonormale: B.O.N.) per uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ è una famiglia $S \subseteq \mathcal{H}$:
(1) S è una famiglia ortonormale;
(2) S è massimale con questa proprietà:
se $T \supseteq S$ è una famiglia ortonormale, allora $T = S$.

Teorema. In ogni $\mathcal{H}$ di Hilbert c'è una famiglia ortonormale.

Dim. Sia $\mathcal{C}$ la classe delle famiglie ortonormali in $\mathcal{H}$, ordinate per inclusione. $(\mathcal{C}; \subseteq)$ è un insieme parzialmente ordinato e (se $\mathcal{H} \neq \{0\}$) $\mathcal{C} \neq \emptyset$.
Sia $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un insieme linearmente ordinato in $\mathcal{C}$ (cioè $\forall \alpha, \beta \in A \Rightarrow S_\alpha \subseteq S_\beta$ o $S_\beta \subseteq S_\alpha$). Allora $\bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha = \bar{S} \in \mathcal{C}$ è una famiglia ortonormale e $S_\alpha \subseteq \bar{S}$ $\forall \alpha \in A$.
Per il Lemma di Zorn $(\mathcal{C}, \subseteq)$ ha un elemento massimale M: $M \in \mathcal{C}$ e $M \subseteq N \in \mathcal{C} \Rightarrow N = M$. M è un S.O.N.C. per $\mathcal{H}$.

OSS. Più tardi vedremo che se $\mathcal{H}$ è separabile, allora l'esistenza di un S.O.N.C. si dimostra costruttivamente, senza Lemma di Zorn.

Teorema. Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $S = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un suo S.O.N.C. Allora $\forall y \in \mathcal{H}$:

$$(1) \quad y = \sum_{\alpha \in A} (x_\alpha, y) x_\alpha$$

dove la somma converge in $\mathcal{H}$: $I = \{\alpha \in A : (x_\alpha, y) \neq 0\}$ è numerabile, $I = \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, e $\lim_{N \to \infty} \| y - \sum_{n=1}^{N} (x_\alpha, y) x_\alpha \| = 0$

$$(2) \quad \|y\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |(x_\alpha, y)|^2$$

~~dim~~ Viceversa, se $\{c_\alpha\}_{\alpha \in A} \in \mathbb{C}$ e $\sum_{\alpha \in A} |c_\alpha|^2 < +\infty$, allora $\sum_{\alpha \in A} c_\alpha x_\alpha = x$ converge in $\mathcal{H}$.

Dim. Bessel $\Rightarrow \sum_{n=1}^{N} |(x_{\alpha_n}, y)|^2 \le \|y\|^2 \quad \forall N \ \forall \alpha_1, \dots, \alpha_N \in A$

$\Rightarrow \sum_{\alpha\in A} |(x_\alpha, y)|^2 \overset{df.}{=} \sup_{\substack{N\ge 1\\ \alpha_1,\dots,\alpha_N\in A}} \sum_{n=1}^{N} |(x_{\alpha_n}, y)|^2 \le \|y\|^2$

$\Rightarrow A(y) = \{\alpha\in A : (x_\alpha, y) \neq 0\}$ è numerabile (perché? Esercizio!).

Ordiniamo $A(y) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N, \dots\}$

Abbiamo che $\sum_{n=1}^{N} |(x_{\alpha_n}, y)|^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} C_1 < +\infty$.

Sia $y_n = \sum_{j=1}^{n} (x_{\alpha_j}, y) x_{\alpha_j}$. Allora $\|y_n - y_m\|^2 \underset{n\ge m}{\overset{P}{=}} \sum_{j=m+1}^{n} |(x_{\alpha_j}, y)|^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0 \Rightarrow \{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ è di Cauchy e tende a $y' = \sum_{n=1}^{\infty} (x_{\alpha_j}, y) x_{\alpha_j}$.

Ora $(y - y', x_{\alpha_\ell}) = \lim_{n\to\infty} \left(y - \sum_{j=1}^{n} (x_{\alpha_j}, y) x_{\alpha_j}, x_{\alpha_\ell}\right)$

$= (y, x_{\alpha_\ell}) - \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} (y, x_{\alpha_j}) \cdot (x_{\alpha_j}, x_{\alpha_\ell})$

$= (y, x_{\alpha_\ell}) - \lim_{n\to\infty} \begin{cases} 0 & \text{se } n < \ell \\ (y, x_{\alpha_\ell}) & \text{se } n \ge \ell \end{cases} = 0$

$\Rightarrow (y - y', x_{\alpha_\ell}) = 0 \ \forall \alpha_\ell$, ma $(y - y', x_\alpha) = 0 \ \forall \alpha \notin A(y)$

$\Rightarrow y - y' = 0$ (o potrei aggiungere $\frac{y-y'}{\|y-y'\|}$ al SONC.

cioè $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} (x_{\alpha_j}, y) x_{\alpha_j} = \sum_{\alpha\in A} (x_\alpha, y) x_\alpha = y$ ~~poiché~~ e

$\|y\|^2 = \|y'\|^2 = \lim_n \|y_n\|^2 = \sum_\alpha |(x_\alpha, y)|^2$ ■

Nell'altra direzione,

se $\sum_{\alpha\in A} |c_\alpha|^2 < +\infty$ allora $\{\alpha : c_\alpha \neq 0\} = \{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$

è numerabile (o finito).

Sia $x_n = \sum_{j=1}^{n} c_{\alpha_j} x_{\alpha_j}$: $\|x_n - x_m\|^2 \underset{n>m}{=} \sum_{j=m+1}^{n} |c_{\alpha_j}|^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \{x_n\}$ è di Cauchy $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x$ esiste in $\mathcal{H}$:

$x = \sum_{j=1}^{\infty} c_{\alpha_j} x_{\alpha_j} = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha x_\alpha$.

Facile è verificare che $(x_\alpha, x) = c_\alpha \quad \forall \alpha \in A$.

OSS. La prima parte del Teorema "analizza" $y \in \mathcal{H}$ in termini della base $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$; la seconda "sintetizza" $x = \sum c_\alpha x_\alpha$ dai contributi dei singoli $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Gli (x_α, y) sono i "coefficienti di Fourier" di y nella base $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$

Algoritmo di Gram-Schmidt per la costruzione di una famiglia ortonormale $\{\upsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ da una famiglia di vettori lin. indip. $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Th. Siano $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ vettori linearmente indipendenti in uno spazio con prodotto interno. Allora c'è un'unica famiglia ortonormale $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ tale che

$$\operatorname{span}\{\upsilon_n\}_{n=1}^{\nu} = \operatorname{span}\{v_n\}_{n=1}^{\nu} \qquad \forall \nu \geq 1.$$

Algoritmo.

$$w_1 = v_1 \qquad \upsilon_1 = w_1 / \|w_1\|$$

$$w_2 = v_2 - (\upsilon_1, v_1)\upsilon_1 \qquad \upsilon_2 = w_2 / \|w_2\|$$

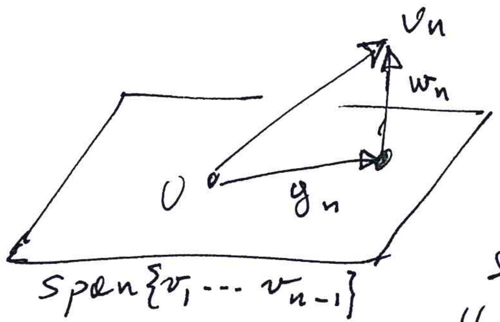
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$w_n = v_n - \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} (\upsilon_k, v_n)\upsilon_k}_{\in\ \operatorname{span}\{\upsilon_1 \dots \upsilon_{n-1}\}} \qquad \upsilon_n = w_n / \|w_n\|$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{span}\{\upsilon_1 \dots \upsilon_{n-1}\} \\ \qquad\| \\ v_n \notin \operatorname{span}\{v_1 \dots v_{n-1}\} \end{array}\right| \Rightarrow w_n \neq 0 \Rightarrow \|w_n\| \neq 0.$$

e $w_n \in \operatorname{span}\{v_1 \dots v_n\}$.



$$g_n = \sum_{k=1}^{n-1} (\upsilon_k, v_n)\upsilon_k$$

Calcolo mostra che se $\{\upsilon_1 \dots \upsilon_{n-1}\}$ sono S.O.N. (ipotesi induttiva) allora (g_n, w_n), così posso usare il teorema sulle proiezioni.

<u>Teorema</u>. Se $\mathcal{H}$ è di Hilbert e separabile, allora ha una base ortonormale completa.

(L'enunciato ci è noto, ma qui la dimostrazione è costruttiva).

<u>Dim</u>. Sia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ un sottoinsieme denso in $\mathcal{H}$.

Rimuovendo dei vettori, posso estrarre un sottoinsieme $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ costituito da vettori linearmente indipendenti.

Applico Gram-Schmidt e trovo $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$$V := \mathrm{span}\{v_n\}_{n=1}^{\infty} = \mathrm{span}\{u_n\}_{n=1}^{\infty} = \mathrm{span}\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Quindi V è un sottospazio ~~chiuso~~ di $\mathcal{H}$.

Se V non fosse chiuso, $\bar{V} \neq \mathcal{H}$, troverei $x \in \bar{V}^{\perp}$ con $1 = \|x\| \geq \|x - f_n\|$ $\forall n \Rightarrow \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ non era denso.

Cioè: $\bar{V} = \mathcal{H} \Rightarrow \{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una B.O.N.C.

Più in generale.

<u>Teorema</u>. $\mathcal{H}$ è separabile, ~~allora~~ $\Leftrightarrow$ ha una base al più numerabile.

<u>Dim.</u> ($\Rightarrow$) già visto.

($\Leftarrow$) Usare i razionali o i numeri diadici.